Cours de mathématiques M.P.S.I.

D'après les cours de M. De Granrut

Henriet Quentin
Ausseil Lucas
Perard Arsène
Philipp Maxime

Logique et principes de démonstration

1. Logique

Définitions :

Propriété, proposition, théorème, lemme, corollaire : résultats que l'on peut démontrer.
Lemme : résultat intermédiaire que l'on trouve à l'intérieur d'une preuve.
Axiome : résultat considéré vrai.
Assertion : résultat dont on sait s'il est vrai ou faux.

Table de vérité :

A	Vrai		Faux	
B	Vrai	Faux	Vrai	Faux
et	Vrai	Faux	Faux	Faux
ou	Vrai	Vrai	Vrai	Faux
$\Rightarrow$	Vrai	Faux	Vrai	Vrai
$\Leftrightarrow$	Vrai	Faux	Faux	Vrai

Définition :

Négation :

A	Vrai	Faux
$\text{non}(A)$	Faux	Vrai

Définition :

$A \Rightarrow B$: A implique B
A : condition suffisante B : condition nécessaire
Il suffit que A pour B. Il faut que B pour A.
$A \Rightarrow B \;=\; B \text{ ou non}(A)$

Définition :

$A \Leftrightarrow B$: A équivaut à B, A si et seulement si B
Pour que B il faut et il suffit que A.

Propriétés :

$\text{non}(A \text{ et } B) \;=\; \text{non}(A) \text{ ou non}(B)$
$\text{non}(A \text{ ou } B) \;=\; \text{non}(A) \text{ et non}(B)$
$\text{non}(A \Rightarrow B) \;=\; A \text{ et non}(B)$
$A \Rightarrow B \;=\; \text{non}(B) \Rightarrow \text{non}(A)$ (principe de contraposition)

2. Principes de démonstration

2.1. Méthode directe

Exemple :

n pair $\Rightarrow$ n^2 pair :
$n=2p \quad n^2=4p^2=2\underbrace{(2p^2)}_{\in\mathbb{Z}}$ pair.

2.2. Principe de contraposition

Exemple :

n^2 pair $\Rightarrow$ n pair :
Par contraposition, on va montrer que n impair $\Rightarrow$ n^2 impair :
$n=2q+1$ avec $q\in\mathbb{Z} \quad n^2=4q^2+4q+1=2\underbrace{(2q^2+q)}_{\in\mathbb{Z}}+1$ impair.

2.3. Par l'absurde

Principe :

$(\text{non}(B) \text{ et } A) \Rightarrow$ Contradiction.

Exemple :

$\sqrt{2}$ n'est pas rationnel : Supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel : $\sqrt{2}=\dfrac{p}{q}$ irréductible.

Alors $2=\dfrac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow p^2=2q^2$ donc p^2 pair, donc p pair, donc $p=2p'$ donc $2p'^2=q^2$ donc q^2 est pair, donc q est pair.

Alors la fraction $\dfrac{p}{q}$ n'est pas irréductible : contradiction.

2.4. Disjonction de cas

Exemple :

n^2 pair $\Rightarrow$ n pair.

Deux cas possibles :
1. n pair $\Rightarrow$ n^2 pair.
2. n impair $\Rightarrow$ n^2 impair.

2.5. Raisonnement par équivalences

Principe :

$B \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$ Vrai.

2.6. Récurrence

H_n : assertion qui dépend d'un entier naturel n.

Récurrence simple :
- H_{n_0} vrai
- Si $n \geqslant n_0$ H_n vrai $\Rightarrow H_{n+1}$ vrai

Alors $\forall n \geqslant n_0,\ H_n$ vrai.

Récurrence double :
- H_{n_0} et H_{n_1} vrais
- H_n et H_{n+1} vrais $\Rightarrow H_{n+2}$ vrai

Alors $\forall n,\ H_n$ vrai.

Récurrence avec prédécesseurs :
- H_{n_0} vrai
- $H_0, H_1, \ldots, H_n$ vrais $\Rightarrow H_{n+1}$ vrai

Alors $\forall n,\ H_n$ vrai.

3. Ensembles et quantificateurs

Exemples d'ensembles :

$\{1;2;3\}$ $[1;4[$ $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ $\{n\in\mathbb{N}$ tel que n pair et $10\nmid n\}$

Quantificateurs :

$\forall$: Quelque soit, Pour tout

$\exists$: Il existe

$\exists!$: Il existe un unique

non$(\forall a\in A$ on a $P(a))$ = $\exists a\in A$ tel que non$(P(a))$ non$(\exists a\in A$ tel que $P(a))$ = $\forall a\in A$, non$(P(a))$

* * * * *